ASOCIACION ARGENTINA
DE ECONOMIA POLITICA

ANALES | ASOCIACION ARGENTINA DE ECONOMIA POLITICA

XLIII Reunión Anual

Noviembre de 2008

ISSN 1852-0022
ISBN 978-987-99570-6-6

El Riesgo en Evaluación de Pequeños Proyectos

Vera, Juan Carlos

El Riesgo en Evaluación de Pequeños Proyectos

Vera, Juan Carlos[#]

Buenos Aires, Agosto, 2008

Ministerio de Economía

Todos los conceptos vertidos en este trabajo son de mi exclusiva responsabilidad.

Resumen

El presente trabajo estudia algunas consideraciones generales sobre la evaluación del riesgo en pequeños proyectos con inversiones. Se propone una función normal de densidad conjunta para modelar una componente aditiva estocástica que forma parte del los flujos de un proyecto. Se deduce una función de densidad uniforme para expresar la densidad del valor presente neto del proyecto. Esta función de densidad se utiliza para investigar la relación entre el valor presente neto esperado, su variancia y su probabilidad de pérdida máxima expresando esto mediante dos observaciones formales.

Código Jel:D81

Abstract

In this paper have been made some general considerations about of risk evaluation into small projects. It is used a normal joint probability density function for modeling one stochastic additive component of benefit and cost flows of a project. It is obtained an uniform probability density function as a density function of net present value NPV of the project. Using this function has been postulated two formal observations to express the relationship between all, expected value, variance and maximal lost probability of the NPV.

Jel Code: D81

I-Introducción

En la teoría de evaluación económica y comercial de proyectos aún persisten controversias[1] sobre la tasa a utilizar para descontar los flujos de beneficios y costos, sobre los precios a usar para valorar estos beneficios y costos, y sobre la neutralidad de beneficios y costos respecto a quienes los perciben. En varias situaciones, especialmente en proyectos pequeños, la decisión de hacerlo o no, o de continuarlo o no, mas que de las controversias depende de algunas contingencias que se afrontan al momento de la evaluación para generar indicadores asociados al valor del proyecto.

Por ejemplo el dueño de una pequeña firma agrícola, quien tiene menos posibilidad de contratar un seguro agropecuario se pregunta si sembrar o no un determinado producto siguiendo las perspectivas de evolución de los precios tanto de productos como de insumos. También pude preguntarse si levantar o no la cosecha dado los precios esperados al momento de la venta al no poder participar en el mercado de futuros. Iguales interrogantes le surgen al considerar los efectos posibles de factores climáticos y ambientales. ¿Qué efectos podrían tener las heladas a destiempo o las sequías imprevistas o el granizo sobre la viabilidad del emprendimiento productivo?. ¿Conviene o no seguir con una alternativa productiva al considerar la variabilidad proveniente de estos eventos inciertos?.

Para estudiar el impacto de estas situaciones especiales sobre la vida útil de un proyecto (hacerlo o no y durante cuánto tiempo, continuar o no con el mismo) es habitual evaluar el "riesgo" usando la valoración subjetiva que el inversor-productor[2] hace de las medidas que capturan los efectos de estas contingencias. Esta forma de evaluar el riesgo permite incorporar y estudiar la componente aleatoria asociada al proceso de toma de decisiones por parte de un inversor. El modo natural de expresar la componente de riesgo en la evaluación de un proyecto es mediante una medida de la dispersión empírica o numérica de su valor presente neto (NPV) generada por simulación de montecarlo u obtenida de la experiencia de un agente informado.

La aplicación del método montecarlo no requiere suponer una distribución teórica para el valor presente neto de la alternativa de proyecto en estudio. Una estrategia posible es elegir[3] distribuciones paramétricas para las variables aleatorias consideradas, simular los valores para estas variables, computar el NPV correspondiente a cada simulación, y finalmente computar la variancia V y el valor esperado E para la distribución empírica del NPV resultante de la simulación. Los valores de variancia y esperanza obtenidos se utilizan para evaluar en alguna función de utilidad las alternativas de proyecto bajo condiciones, ahora, riesgosas.

El objetivo principal que se persigue en el presente trabajo es complementar la estrategia mencionada de simulación mediante la deducción de la distribución teórica del NPV de las alternativas de proyecto dada una distribución para las variables aleatorias originales, y luego utilizar esta distribución teórica para computar y estudiar los vínculos entre la esperanza E y medidas de riesgo, como la variancia V y la probabilidad de pérdida P(-a),

---

1 Harberger (2003) realiza una excelente presentación sobre estas controversias que aún persisten hoy en día. El autor en este mismo artículo, además de considerar las distorsiones intertemporales asociadas a un proyecto, toma en cuenta las distorsiones contemporáneas del mismo.

2 De aquí en adelante se usará el vocablo "inversor" para referirse indistintamente a un "inversor" o un "productor" que está evaluando alternativas de proyecto.

3 Por ejemplo, Vera (2002) considera como variable aleatoria con distribución uniforme al nivel de producción en cada período y modela la optimización del NPV entre varias alternativas.

asociadas a cada una de las alternativas de proyecto en estudio sin recurrir al ejercicio de simulación.

II-Consideraciones Básicas para Evaluar el Riesgo de un Proyecto

Como resultado final de una simulación de montecarlo se obtiene un conjunto de pares (variancia, esperanza)=(V,E)[4] del valor presente neto de todas las alternativas posibles del proyecto. Sobre este conjunto de pares ordenados (V,E) se postula evaluar una función de utilidad U(V,E) que es propia de cada inversor y que permite generar valores de utilidad para de ahí elegir aquella alternativa de proyecto que maximiza U(V,E) dada las restricciones de recursos disponibles para llevar adelante el proyecto.

La teoría de decisión bajo condiciones de riesgo nos enseña que, dada una dotación de recursos para invertir, la decisión tomada por inversores distintos puede diferir por la sola consideración del riesgo. Cada inversor posee su propia valoración subjetiva para los pares ordenados (variancia, esperanza) de modo que la elección óptima puede diferir entre ellos. O, lo que es lo mismo, un inversor al elegir la mejor alternativa de proyecto se comporta como si maximizara su propia función de utilidad definida sobre el conjunto de pares ordenados (variancia, esperanza) luego de haber evaluado su función en cada par (V,E) de sus alternativas de proyecto.

Por ejemplo un inversor neutral al riesgo elegirá la alternativa de proyecto que maximiza[5] U sin mirar V pues él es indiferente al riesgo proveniente de la dispersión del NPV que es capturado, en este caso, por V. A este inversor le alcanza con elegir aquella alternativa que maximiza E. un inversor averso al riesgo evaluará su función de utilidad con mucho mas cuidado pues él podría estar dispuesto a sacrificar algo de ganancia con el afán de reducir el riesgo de su proyecto.

Mientras que un inversor amante del riesgo dejaría de sacrificar ganancia tomando mas riesgo siempre que el valor que él le otorgue, en su función de utilidad, al adicional de ganancia probable de la dispersión supere al valor de las pérdidas probables por causas de esa misma dispersión del NPV y que es capturada por V. Esta es una razonable explicación del por qué un inversor elige una alternativa de proyecto con mayor variancia V incluso si la esperanza E del NPV no cambia.

Observe que en este contexto la elección del inversor bajo condiciones de riesgo no requiere el conocimiento de la distribución del NPV. Le alcanza con conocer el conjunto de pares (V,E) y luego evaluar su función de utilidad sobre este conjunto para elegir el par (V,E) que maximiza U(●). Sí él conociera la distribución del NPV podría hacer endógenas variables que consideraba exógenas, como el horizonte del proyecto, y transformar otras variables en exógenas, como el máximo riesgo admitido, para elegir luego aquella alternativa que maximiza el NPV esperado. Se presenta a continuación una propuesta simple para obtener la distribución del NPV.

III-Modelo Estocástico para los Flujos y el NPV

El Valor Presente Neto (NPV) de una alternativa de proyecto es una métrica fija que se emplea para juzgar su deseabilidad. El criterio de deseabilidad dice: un proyecto, o

4 Se expresa el par como (V;E) y no como (E,V) por la simple convención que un par (V,E) se ubica en un plano cartesiano con curvas de nivel de la gráfica de una función de utilidad con dominio V en el eje horizontal y E en el eje vertical.

5 Note que U(V,E) se supone directamente proporcional a E de modo que sí U(●) es independiente de V entonces U(●) es máxima si y solo si E lo es.

alternativa, es deseable sí y solo sí su NPV es mayor o igual a cero. Como el NPV se computa a partir de una secuencia (temporal) no completamente conocida de flujos de fondos entonces no es inapropiado pensar a tal secuencia como una función de variables aleatorias generadas por una función de distribución Ŧ. O sea, hay un mecanismo subyacente Ŧ que genera tal secuencia.

Sea Ŧ un mecanismo paramétrico que genera secuencias para cada una de las alternativas de un proyecto determinado. Dada una secuencia de flujos de una alternativa cualquiera del proyecto $F=(F_0, F_1, ..., F_n)$, tal que[6] $F_t=K_t+R_t$, con K_t componente fija y R_t un residuo o componente estocástico de los flujos en t. Sí se elige una función de densidad para cada componente de la secuencia, es posible encontrar una medida de la probabilidad del NPV estimando una función de densidad conjunta para los elementos de toda la secuencia de flujos.

Suponga que cada uno de los componentes aleatorios de la secuencia de flujos es generado por el mismo mecanismo paramétrico Ŧ conocido. Suponga que tal mecanismo es una distribución Ŧ normal. Luego, por propiedad de una función de una variable aleatoria[7], la función de densidad de la distribución normal de los flujos coincide, como era de esperar, con la función de densidad normal de la componente estocástica multiplicada por el factor, Jacobiano, de cambio de variable:

$$f(F_t,\theta_F) = (1+\mathrm{r})^{\mathrm{t}} f(R_t,\theta_R) = (1+\mathrm{r})^{\mathrm{t}} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{R_t-\mu}{\sigma})^2} \quad [1]$$

Donde $f(F_t,\theta)$ es la función de densidad del flujo F_t, F_t es el valor monetario del flujo en el periodo t, R_t es el valor monetario de la componente estocástica del flujo en el periodo t, θ_F es el vector de parámetros de la distribución de F_t, θ_R es el vector de parámetros de la distribución de R_t, σ^2 y μ son la variancia y la esperanza de la variable aleatoria R_t, y $(1+r)^t$ se interpreta como un factor de corrección que permite trasladar la densidad al periodo que corresponde, y proviene de considerar el factor de descuento que multiplica a los flujos y se traslada a la función de densidad al hacer el cambio de variable.

Observe que los parámetros σ^2 y μ de $f(\bullet)$, en [1], no dependen de t con lo cual todos los flujos de la secuencia poseen exactamente la misma distribución Ŧ. Al ser estos flujos estadísticamente independientes entonces la densidad conjunta de la secuencia de flujos es equivalente al producto de las densidades marginales de los flujos. Llamando $v=\sigma^2$, se propone una función de verosimilitud $\ell(\theta)$ igualando ésta a la función de densidad conjunta $f(F,\theta)$ de la secuencia de flujos:

$$\ell(\theta) = (1+\mathrm{r})^{\frac{\mathrm{n}}{2}(\mathrm{n}+1)} (2\pi v)^{-\frac{1}{2}(\mathrm{n}+1)} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2v}\sum_{\mathrm{t}=0}^{\mathrm{n}} (\mathrm{R}_\mathrm{t}-\mu)^2} \quad [2]$$

6 Suponer una estructura aditiva para la componente aleatoria resulta ventajoso en el caso de evaluación de proyectos pues el propio NPV se construye como un agregado aditivo de elementos positivos (ingresos) y negativos (costos). Por lo tanto si una de estas componentes resultara aleatoria, por depender de una variable aleatoria, entonces es muy cómodo aislar el tratamiento de esta componente y luego agregarla al resultado final de la componente "no" estocástica. Otra ventaja de esta estructura es que no se requiere postular una expresión (implícita o explícita) para la función de producción, la cual es desconocida en la gran mayoría de los casos de pequeños proyectos.

7 Ver detalles de esta propiedad en Greene (2000) página 74. Para detalles adicionales de densidad conjunta de varias variables aleatorias normales ver Greene (2000) desde la página 83 a la 90.

Los parámetros v y μ de Ŧ pueden estimarse usando el método de máxima verosimilitud[8], (ML), eligiendo el vector θ=(v, μ) que maximiza esta función $\ell(\theta)=f(F,\theta)$ de densidad conjunta[9] de los flujos.

Así, usando la expresión [2] resulta trivial elegir estimadores ML para θ:

$$v = \sigma^2 = \frac{\sum_{t=0}^{n} (R_t - \mu)^2}{n+1}; \mu = \frac{\sum_{t=0}^{n} R_t}{n+1} \quad [3]$$

En [3] quedan estimadas la variancia y esperanza de la componente estocástica de los flujos del proyecto.

Como todos los flujos tienen la misma variancia y esperanza luego, introduciendo [3] en [2], la densidad conjunta de la expresión [2] puede escribirse de una forma más simple:

$$\ell(\theta) = (1+r)^{\frac{n}{2}(n+1)} (2\pi e v)^{-\frac{1}{2}(n+1)} \quad [4]$$

En rigor, [4] no es equivalente a [2] pero evaluada en el vector de estimadores (σ^2, μ) representa un máximo de [2] dado los datos de la muestra. Sí se supone que éste máximo lo es para todas las muestras posibles entonces el estimador μ es la media de la densidad conjunta, por lo que el vector de estimadores se corresponde con la máxima densidad para cualquier función monótona de las variables aleatorias como lo es el NPV[10].

Bajo las condiciones mencionadas, una función uniforme como [4] es siempre mayor o igual a cualquier función como [2], tiene el mismo valor esperado que [2], la misma mediana, aunque su variancia casi siempre difiere de la obtenida con [2]. La expresión [4] al ser uniforme tiene la ventaja de su simpleza para la manipulación algebraica. Dada las coincidencias, y sabiendo que al evaluar alternativas un inversor mira mas que los valores absoluto los cambios en los parámetros del NPV, se propone a [4] como una función de densidad para estudiar el riesgo entre las distintas alternativas de proyecto.

Observe que [4], al ser una función de densidad, le pone una cota inferior a la variancia v de

---

8 Ver detalles para la estimación eficiente de parámetros en Greene (2000) páginas 123, 124, 125 y 126.

9 Revisar las funciones de densidad conjunta en Greene (2000) páginas 123, 124 y 125. Se acepta, sin prueba, que los estimadores ML maximizan la densidad conjunta.

10 Se recuerda que por el supuesto de aditividad la expresión considerada en esta oportunidad para computar el NPV adopta la siguiente forma: $NPV = \sum_{t=0}^{n} \left(\frac{F_t}{(1+r)^t}\right) = \sum_{t=0}^{n} \left(\frac{R_t}{(1+r)^t}\right) + \sum_{t=0}^{n} \left(\frac{K_t}{(1+r)^t}\right)$, donde: $K = \sum_{t=0}^{n} \left(\frac{K_t}{(1+r)^t}\right)$. Esta forma de escribir el NPV permite considerar por lo menos tres situaciones posibles para la secuencia de flujos de un proyecto. Un caso extremo se corresponde a la forma tradicional en donde NPV=K, por lo que no hay componente aleatoria. Otro caso extremo es considerar K=0, por lo que todo el flujo es aleatorio. Finalmente se tienen todas las situaciones intermedias en las cuales 0≠K≠NPV o NPV=0. Un caso intermedio especial es aquel en donde K es equivalente al valor presente de todos los gastos en bienes durables, o sea las inversiones.

los flujos. Esta variancia no puede ser inferior a $(1+r)^n/2\pi e$. Si la variancia traspasa esta cota entonces el NPV deja de ser aleatorio y se vuelve fijo pues [4] colapsa en un punto de medida cero. Suponiendo que *v* cumple con las exigencias de [4] se estima a continuación el vector de parámetros de la distribución del NPV.

IV-Riesgo y Valor Esperado del NPV

Se dijo que el NPV se computa a partir de una secuencia de flujos que se supone estocástica. Por esto el propio NPV es también una variable aleatoria. Como el NPV es una suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces es simple computar su esperanza usando el parámetro μ que maximiza [4] y la propiedad de la esperanza de una suma de variables aleatorias. Igualmente usando [4] se podrá computar la variancia del NPV.

$$V = \frac{(b-a)^2}{12} \neq \sigma^2 \sum_{t=0}^{n} \left(\frac{1}{(1+r)^{2t}}\right) = V1$$

$$E = \mu \sum_{t=0}^{n} \left(\frac{1}{(1+r)^{t}}\right) + K \qquad [5]$$

Donde a y b son los extremos de la distribución uniforme del NPV. V en [5] indica que el riesgo, medido por la variancia asociado al NPV uniformemente distribuido aumenta con el horizonte pues la función ML se desplaza hacia abajo con n con lo cual los extremos del intervalo [a, b] se alejan entre si. Pero también aumenta la variancia del NPV normalmente distribuido dada por V1 en [5]. Esto induce un resultado intuitivo que dice que cuanto más extensa es, dada una variancia de los flujos, más riesgosa resulta una alternativa de proyecto.

A continuación se presentan algunos resultados preliminares que se obtienen al considerar una distribución uniforme para el NPV dada por [4], y también una simple observación que formaliza el vínculo entre la esperanza, la variancia y la probabilidad de pérdida máxima del NPV para dos alternativas cualquiera de un proyecto

V-Resultados Preliminares

Como se dijo, la expresión [4] sugiere que la densidad conjunta de los flujos es independiente del NPV, pues solo depende del horizonte y del parámetro *v* que es la variancia de los flujos. Luego, si [4] aproxima la función de densidad del NPV entonces éste se distribuye uniformemente con una densidad dada por [4]. Este supuesto permite computar una cota mínima “a” y una cota máxima “b” para el NPV, cuyos valores son[11]:

$$a = E - \frac{1}{2\ell(\theta)}$$

$$b = E + \frac{1}{2\ell(\theta)} \qquad [6]$$

11 Ver el anexo (página 11) en Vera (2002) para revisar el cómputo de la esperanza y la variancia de una variable con distribución uniforme: $E=(a+b)/2$ y $V=[(b-a)^2]/12$.

Observar que la variancia del NPV computada con [5], nada dice sobre las pérdidas probables asociadas al proyecto. Mientras que “a”, de ser menor a cero[12], resulta útil en la práctica para computar una métrica que mida las pérdidas máximas probables del proyecto, en el sentido que valores del NPV comprendidos entre “a” y “cero” tienen una probabilidad mayor a cero. Esta probabilidad es lo que se llama “probabilidad de pérdida máxima” del proyecto. Sea “-a”[13] la pérdida máxima, entonces la probabilidad asociada a esta pérdida máxima, P(-a), queda:

$$\begin{aligned} P(-a) &= P(a \leq NPV \leq 0) \\ &= \int_a^0 \ell(\theta)\,dNPV \qquad [7] \\ &= \frac{1}{2} - E\ell(\theta) \end{aligned}$$

Para que [7] tenga sentido se requiere, ademas de a<0, que sea b>0. Si b es menor a cero no se podrá aplicar [7] para computar la probabilidad de pérdida máxima pues en tal caso sucede que se obtiene un valor superior a 1 lo cual es absurdo. Esto ocurre cuando el NPV esperado es muy negativo y la densidad uniforme lo suficientemente alta como para que todo el intervalo de integración esté contenido en un segmento negativo de la recta real. En este caso la probabilidad de pérdida es 1.

Aplicando este resultado para la distribución del NPV, y suponiendo que se cumplen las condiciones mencionadas para la variancia *v* y los extremos a y b de integración, se establece formalmente un vínculo entre el cambio en la probabilidad de pérdida máxima y el cambio en la variancia de un proyecto. Se presenta esto usando una modesta observación:

►Observación

Sean E_0, E_1, V_0, V_1, ℓ_0, ℓ_1, P_0 y P_1 esperanzas, variancias, densidades y probabilidades de pérdida máxima del NPV (con E_i, V_i, ℓ_i todas distintas de cero) para las alternativas 0 y 1 respectivamente, Sea [7] un esquema válido para modelar la probabilidad de pérdida máxima de una alternativa cualquiera de proyecto. Sí E_0 y E_1 tienen igual signo entonces la probabilidad de pérdida máxima cambia en el sentido del coeficiente de variación del NPV. En otro caso cambia en el sentido opuesto al coeficiente de variación.

Demostración

Siempre se cumple que $P_1-P_0\geq 0 \Longleftrightarrow P_1\geq P_0 \Longleftrightarrow ½-E_1\ell_1\geq ½-E_0\ell_0 \Longleftrightarrow E_1\ell_1\leq E_0\ell_0$. Trivialmente, si $E_0=E_1=0$ entonces la probabilidad de pérdida no cambia y tampoco están definidos los coeficientes de variación por lo que no hay nada que probar. Si $E_i=0$ para algún $i \in \{0, 1\}$, tampoco está definido algún coeficiente de variación, por lo que no hay nada para probar. Queda el caso en el que E_0 y E_1 son ambos distintos de cero.

De la expresión de la variancia V en una densidad uniforme ℓ se deduce que $12V=\ell^{-2}$. Sea el desvío $D=V^{1/2}$. Luego $E_1\ell_1\leq E_0\ell_0 \Longleftrightarrow D_0/E_0\leq D_1/E_1$. Que es la desigualdad en términos de

12 Esta condición, a<0, se cumple siempre que el doble de la esperanza E del NPV esté por debajo de la cota superior exponencial dada por $(2e\pi v)^{(n+1)/2}/(1+r)^{n(n+1)/2}$. Observe que esta exponencial crece rápidamente con el horizonte del proyecto.

13 La expresión P(-a) se lee “probabilidad de perder la cantidad |a|”, suponiendo que “a” es menor a cero.

coeficientes de variación. Sí los signos de la esperanza son distintos entonces se da vuelta la desigualdad por lo que la probabilidad de pérdida máxima cambia en sentido opuesto al del coeficiente de variación. Con esto queda probada la observación.◀

En primer lugar note que esta observación vale para cualquier densidad uniforme del NPV de un proyecto pues solo se utiliza la uniformidad requerida para obtener la expresión [7] como supuesto de partida. En particular la observación vale para el modelo uniforme de la expresión [4]. Esta generalidad es útil cuando se esta simulando el NPV bajo condiciones de densidad uniforme, en cuyo caso los desvíos y esperanzas simuladas sirven para chequear el comportamiento de la probabilidad de pérdida máxima sin necesidad de computar extremos de integración.

Cuando el resultado de la observación se aplica aplica usando [4] entonces solo es de utilidad para estudiar alternativas de muy pocos (dos a cinco) periodos ya que en otro caso D se hace muy grande. Este problema es resuelto por un teorema, que se enuncia luego, el cual establece las relaciones entre la probabilidad de pérdida máxima, el horizonte del proyecto, y la esperanza del NPV sin necesidad de computar su variancia V.

Obviamente, que el caso más relevante es aquel en el cual ambas esperanzas son mayores a cero para el cual la observación garantiza que un aumento en el coeficiente de variación del NPV se corresponde con un aumento en la probabilidad de pérdida máxima y esto pasa tanto con ℓ uniforme como con ℓ normal.

VI-Evaluación del Riesgo Asociado al Horizonte del Proyecto

En la práctica existen situaciones donde las pérdidas del proyecto disminuyen con el horizonte porque contingencias negativas particulares, acotadas temporalmente, impactan con menor importancia sobre el valor total del proyecto cuando sus efectos se dispersan en mayor número de periodos de tiempo. Este fenómeno aparece al generarse nuevos beneficios con un proyecto de mayor duración. Se pretende usar la probabilidad de pérdida, según el modelo propuesto en [7], para estudiar este efecto del tiempo sobre el riesgo global de un proyecto.

En los términos del modelo propuesto en [4] y [5] por acción del tiempo podría pasar que dada la variancia v y la esperanza μ para los flujos de un proyecto, densidades $\ell(v)$ con alta variancia V (del NPV) acumulen menos probabilidad de pérdida máxima[14] dado que la esperanza E (del NPV) crece más rápido, con el tiempo, que su variancia V tal como lo sugiere [5]. Naturalmente, sí la probabilidad de pérdida máxima se hace cero entonces el riesgo de pérdidas es cero aunque aumente el horizonte.

Un inversor, que está estudiando la viabilidad de un proyecto, podría enfrentar la decisión de alargar o acortar su horizonte de evaluación de tal manera que ello le implique un cambio en la componente fija sin afectar significativamente la componente aleatoria de los flujos, como sería el caso de una mayor inversión dado que el proyecto se hace mas largo. Mas largo o mas corto serían sus dos alternativas. Se debe elegir un un horizonte sabiendo que al acortarlo o alargarlo podría cambiar el riesgo de las inversiones. Incluso podría preguntarse:¿para decidir si invertir o no, o continuar o no, es relevante el cambio en el riesgo del proyecto al cambiar el horizonte del mismo?.

14 Recordar que la probabilidad de pérdida máxima se define analíticamente como la integral de la expresión [4] para los valores de NPV comprendidos entre menos infinito y cero. Para el caso que se está estudiando alcanza con considerar “a” y “0“ como los extremos del intervalo de integración

De [6] y [7] resulta que la pérdida máxima y su probabilidad dependen de E de *v* y del horizonte del proyecto. Dado esto, se propone a continuación un teorema para examinar las condiciones bajo las cuales la probabilidad de pérdida máxima disminuye al aumentar el horizonte de un proyecto y así tener una idea formal del vínculo entre estas componentes.

►Teorema

Sean los flujos de fondos $\{F_t=K_t+R_t\}_{t\epsilon T}$ de un proyecto con $\{R_t\}_{t\epsilon T}$ una secuencia de variables aleatorias normales independientes e idénticamente distribuidas con variancia $\sigma^2=v$ y esperanza μ. Sean *v*, μ, ℓ(), E, "a" y P(-a) definidas por [3], [4], [5], [6] y [7], respectivamente. Sean E_0 y E_1 el NPV esperado de dos alternativas de proyecto que solo difieren en su duración y cuyos flujos tienen igual variancia *v* y esperanza μ. Luego:

(1)-Sí $E_i \leq 0$ y $E_j \geq 0$ para $i,j \epsilon \{0, 1\}$, entonces la probabilidad de pérdida máxima no cambia, o disminuye, o aumenta, al aumentar el horizonte del proyecto sí y solo si $E_1-E_0=0$, o $E_1-E_0>0$, o $E_1-E_0<0$, respectivamente.

(2)-Sí $E_i>0$ $i\epsilon\{0, 1\}$, luego:

$$P_1 < P_0 \Leftrightarrow v < \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^{\frac{2}{s}} \frac{g}{2\pi e}; \qquad g = (1+r)^{2n+s+1}$$

$$P_1 > P_0 \Leftrightarrow v > \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^{\frac{2}{s}} \frac{g}{2\pi e} \qquad [8]$$

(3)-Sí $E_i<0$ $i\epsilon\{0, 1\}$, luego:

$$P_1 < P_0 \Leftrightarrow v > \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^{\frac{2}{s}} \frac{g}{2\pi e}; \qquad g = (1+r)^{2n+s+1}$$

$$P_1 > P_0 \Leftrightarrow v < \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^{\frac{2}{s}} \frac{g}{2\pi e} \qquad [9]$$

Por lo extensa de la demostración del teorema es que se la ha agregado en el anexo.◄

El caso (1) del teorema es un resultado razonablemente intuitivo y su demostración es trivial. La propiedad puede observarse gráficamente, lo cual queda como ejercicio para el lector. El resto de los resultados del teorema no lucen tan intuitivos aunque si convincentes. El caso (2) aparece con frecuencia ya que los inversores generalmente deciden entre alternativas con NPV esperado positivo.

Lo relevante del caso (2) es que si la variancia de los flujos es pequeña (la componente estocástica es casi fija), o si el aumento en el valor esperado del NPV es considerable entonces la probabilidad de pérdida máxima disminuye con el horizonte del proyecto. Este es un evento en donde la esperanza E y la variancia V1 del NPV aumentan, mientras que su probabilidad de pérdida máxima disminuye por lo que el riesgo global del proyecto puede mantenerse mas o menos compensado.

El caso (3) es el de menor importancia. Se resalta el efecto negativo que tiene un aumento en las pérdidas sobre la probabilidad de pérdida máxima. Pero también resalta el efecto positivo de la reducción en las pérdidas. Sí al ampliar el horizonte del proyecto se provoca

una mejora en el NPV esperado, entonces puede pasar que la probabilidad de pérdida máxima disminuya, con lo cual un proyecto mas largo se puede hacer mas deseable que otro mas corto.

VII-Conclusiones

Según el teorema queda abierta la posibilidad para que un proyecto mas largo y con mayor variancia arroje una probabilidad de pérdida máxima mas pequeña y volverse mas deseable que uno mas corto y con menor variancia. En tal situación la elección de un proyecto con mayor NPV esperado pero mas disperso no resulta inconsistente con el comportamiento racional de un agente averso al riesgo que busca la seguridad de sus inversiones incorporando a su proyecto activos de mas larga duración.

Igualmente, aumentar el horizonte de un proyecto irreversible con NPV esperado negativo es consistente con el comportamiento racional de un agente averso al riesgo. Por el caso (3) puede pasar que aumentando el horizonte, el NPV esperado se haga menos negativo provocando una disminución en la probabilidad de perdida máxima. Esto podría mejorar la ponderación que el inversor hace de esta alternativa al evaluarla en su función de utilidad.

¿A qué se debe la persistencia en el tiempo de ciertos proyectos con rendimientos muy bajos?. Con el paso del tiempo pueden diluirse las pérdidas máximas y minimizarse la probabilidad de que efectivamente sucedan. Abandonar o desmantelar el proyecto sería una forma efectiva de absorber las pérdidas observadas hasta ese momento sin dar la posibilidad de ser compensadas con futuras ganancias. Este fenómeno puede detectarse ex-antes, durante el proceso de evaluación del proyecto. Una manera de hacerlo con facilidad es evaluando la probabilidad de pérdida máxima mediante los resultados del teorema. Esto es lo que se hace con un ejemplo incluido en el anexo del trabajo.

VIII-Referencias

Bertsekas Dimitris. 1974. Necessary and Sufficient Condition for Existence of an OptimalPortfolio. Journal of Economic Theory. 8, N°2, (June). 235-247.

Black, Fisher and Myron Scholes. 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. The Jornal of Political Economy, Vol 81, Issue 3, 637-651.

Blake, LeBaron and S. Ritirupa. 2004. Extreme Value Theory and Fat Tails in Equity Markets. International Economics and International Business School, Brandeis University.

Fontaine Ernesto. 1997. Evaluación Social de Proyectos Universidad Católica de Chile. Undécima Edición.

Freund R. 1956. The Introduction of Risk into the Programming Model. Econometrica. 21. 253-263.

Friedman Milton and L. J. Savage. 1952. The Expected Utility Hypothesis and The Measurability of Utility. The Journal of Political Economy. Vol. LX Nº 6. 463-474.

Greene, William H. 2000. Econometric Analysis. Four Edition. New York University. United States of America.

Harberger, Arnold C. 2003. Some Recent Advances in Economic Project Evaluation. Cuadernos de Economía. Año 40, No 121, 579-58.

Markowitz Harry M. 1991. Foundations of Portfolio Theory. The Journal of Finance. Vol. XLVI Nº 2. 469-477.

..... 1959. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. New York; John Wiley & Sons, Inc.

..... 1976. Markowitz Revised. Financial Analysis Journal. 32, N°4, (September-October). 47-52.

Markowitz M. Harry, Kroll Yoram and Haim Levy. 1984. Mean-Variance Versus Direct Utility Maximization. The Journal of Finance, Vol XXXIX, Nº1. 47-61.

Merton Robert. 1972. An Analytical Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. Journal of Financial and Quantitative Analysis. VII, N° 4, (September), pp. 1851-1872.

Vera, Juan Carlos. 2002. Small Project and Wealth Generation. Anales de la XXXVII Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economía Política. Tucumán, Argentina.

IX-Anexo

►Demostración del Teorema

Sea E_0 el valor esperado del NPV inicial y E_1 el valor esperad del NPV al aumentar en s periodos el horizonte del proyecto. Llámese P_0 a la probabilidad de pérdida máxima inicial y P_1 a la probabilidad de pérdida máxima al ampliar el horizonte. Llámese ℓ_0 a la densidad inicial y ℓ_1 a la densidad final.

(1)-Caso $E_i \leq 0$ y $E_j \geq 0$ para $i,j \epsilon \{0, 1\}$

Si $E_0=E_1=0$ entonces la probabilidad de pérdida máxima, por [7], es igual a ½ en ambas alternativas con lo cual la probabilidad de pérdida es indiferente al horizonte del proyecto. Suponga ahora que $E_0=0$ y $E_1 \neq 0$. Luego se cumple que la probabilidad de pérdida máxima aumenta sí y solo si $P_1-P_0>0 \Leftrightarrow P_1>P_0 \Leftrightarrow ½-E_1\ell_1>½-E_0\ell_0 \Leftrightarrow E_1\ell_1<E_0\ell_0$. O sea $0>E_1\ell_1$. Pero esto vale siempre que $E_1<0$, en otro caso, la probabilidad de pérdida máxima disminuye. Suponga ahora que $E_1=0$ y $E_0 \neq 0$. Por el mismo argumento anterior la probabilidad de pérdida máxima aumenta sí y solo si $E_0>0$, y disminuye en otro caso. Para los casos de signos distintos, la prueba sigue los mismos argumentos.

(2)-Caso $E_i>0$ para todo $i \epsilon \{0, 1\}$

Suponga que la probabilidad de pérdida máxima disminuye con el horizonte del proyecto. Entonces se cumple que $P_1-P_0<0 \Leftrightarrow P_1<P_0 \Leftrightarrow ½-E_1\ell_1<½-E_0\ell_0 \Leftrightarrow E_1\ell_1>E_0\ell_0$. Sea "s" la cantidad de periodos en que se extiende el horizonte T del proyecto. Luego usando [4] se obtiene:

$$\ell_1(\theta) = \ell_0(\theta)(1+r)^{\frac{s}{2}(2n+s+1)}(2\pi e v)^{-\frac{1}{2}s} = \ell_0(\theta) g^{\frac{s}{2}}(2\pi e v)^{-\frac{s}{2}} \quad \text{[A1]}$$

$$g = (1+r)^{2n+s+1}$$

Esto permite concluir que:

$$P_1 < P_0 \Leftrightarrow E_0\ell_0 < E_1\ell_1 \Leftrightarrow$$

$$E_0\ell_0 < E_1\ell_0 g^{\frac{s}{2}}(2\pi e v)^{-\frac{s}{2}} \Leftrightarrow \quad \text{[A2]}$$

$$E_0 < E_1 g^{\frac{s}{2}}(2\pi e v)^{-\frac{s}{2}} \Leftrightarrow$$

Luego de reagrupar y despejar *v*:

$$\overset{(E_i>0)}{\Leftrightarrow} \quad v < \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^{\frac{2}{s}} \frac{g}{2\pi e} \quad \text{[A3]}$$

Con lo cual se cumple que la probabilidad de pérdida máxima disminuye sí y solo si vale la desigualdad de [A3]. Dando vuelta ésta desigualdad se deduce como resultado que la

probabilidad de pérdida máxima aumenta, con lo cual quedan probadas ambas implicaciones dobles de este caso.

(3)-Caso $E_i<0$ para todo $i\epsilon\{0, 1\}$

Suponga que la probabilidad de pérdida máxima disminuye con el horizonte del proyecto. Entonces de [A2] se tiene que:

$$E_0 < E_1 g^{\frac{s}{2}} (2\pi e \nu)^{-\frac{s}{2}} \quad \text{[A4]}$$

Como E_0 y E_1 en [A4] son ambas menores a cero, al aplicar módulo en ambos miembros de la desigualdad entonces cambia el sentido de la misma:

$$|E_0| > |E_1| g^{\frac{s}{2}} (2\pi e \nu)^{-\frac{s}{2}} \quad \text{[A5]}$$

Luego procediendo como en [A3] y aplicando la propiedad de que el cuadrado de un módulo es igual su cuadrado, se concluye que:

$$\overset{(|E_i|>0)}{\Leftrightarrow} \quad \nu > \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^{\frac{2}{s}} \frac{g}{2\pi e} \quad \text{[A6]}$$

Con lo cual se cumple que la probabilidad de pérdida máxima disminuye sí y solo si vale la desigualdad de [A6]. Dando vuelta ésta desigualdad se deduce como resultado que la probabilidad de pérdida máxima aumenta, con lo cual quedan probadas ambas implicaciones dobles de este caso.

La prueba de los tres casos deja probado el teorema.◄

►**Corolario**

De los casos (2) y (3) del teorema se desprende como corolario que:

del caso (2) $E_0=E_1$ <=> probabilidad de pérdida máxima disminuye
del caso (3) $E_0=E_1$ <=> probabilidad de pérdida máxima aumenta

Demostración: Trivial.◄

Ejemplo Numérico

Sea un proyecto que dura n años. El inversionista, dueño o evaluador, dispone de información sobre la tecnología la cual implica una inversión inicial I_0 y unos costos medios variables dados por $C(Q_t)=(2/3)Q_t^{3/2}$, donde Q_t es la cantidad producida del bien que se genera con el proyecto en el periodo t. Además se dispone de una secuencia de n valores para el precio P_t del producto. El precio promedio computado con la serie es de $P = \sum_{t=1}^{n} \frac{P_t}{n} = 10$.

La variancia para esta serie de datos ha sido computado como $\sigma^2 = \sum_{t=1}^{n} \frac{(P_t - P)^2}{n} = 3$.

Suponga que los precios tienen una distribuyen normal N(10, 2) de modo que PQ tiene una distribución normal $N(10Q, 3Q^2)$. Sean 10Q y $3Q^2$ estimadores ML de los parámetros esperanza y variancia de una densidad conjunta como la dada en [2].

Los flujos en t>0 están dados por $F_t=P_tQ_t-C(Q_t)$ y $F_0=-I_0$. En este caso la componente estocástica de los flujos está dada por $R_t= P_tQ_t$ y la componente fija es $Kt=C(Q_t)$. Observe que F_t es una función monótona del ingreso PQ por lo que tiene inversa dada por $P_tQ_t = (1+r)^t F_t + C(Q_t)$ siendo $(1+r)^t$ el Jacobiano del cambio de variable que se hace en la función de densidad conjunta. Suponga que la tasa de descuento r = 5%.

El valor de Q, se puede elegir de manera arbitraria siempre que éste represente la capacidad de producción del proyecto. También se puede optar por tomar aquel valor que maximiza F_t. Para este ejercicio se toma el valor óptimo suponiendo que se conoce el precio medio P=10. Luego el óptimo de producción es $Q_t=Q=100$, obtenido de igualar el precio al costo marginal. Luego la variancia de los flujos queda $v=3(100)^2$. Con esta información y siguiendo lo propuesto en [4] la función de densidad conjunta queda:

$$\ell(\theta) = (1.05)^{\frac{n}{2}(n+1)} (6\pi e 100^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)} \quad [10]$$

La expresión [10] reúne casi toda la información requerida para generar valores como los de la tabla 1, para un número arbitrario de años. En esta tabla se han incluido 20 periodos. En la segunda columna se coloca la inversión que debe hacerse en el periodo inicial t=0. Si se pretende un horizonte de 5 años alcanza con una inversión de 1500, mientras que si se busca un horizonte de 20 años entonces se requiere una inversión inicial de 5000.

El costo variable y el ingreso acumulados son los respectivos valores actualizados y acumulados hasta el periodo t. En la quinta columna se ha incluido un chequeo para la condición que debe cumplir la variancia de los flujos. Ésta debe ser mayor a los valores de la tabla cosa que se cumple con holgura. La sexta y séptima columna contienen los valores computados para a y b de la distribución [10]. En la octava columna se computa la densidad según [10]. En la siguiente columna se computa la probabilidad de pérdida máxima P(-a) usando [10]. La décima columna computa el cambio de la P(-a) observado en la columna anterior. La onceava columna computa el cambio de la P(-a) según los resultados del teorema. La columna doce contiene el cambio en E, en la trece se computa E según [5], y en la última columna se computa el desvío estándar para V1 de [5].

Observe las coincidencias en las columnas de cambio en P(-a). La falta de coincidencia aparece por los problemas de redondeo al computar la densidad [10]. Para evitar este problema se recomienda utilizar los resultados del teorema para tener una mejor idea del cambio en la probabilidad de pérdida máxima.

Tabla 1: NPV esperado, su variancia y probabilidad de pérdida máxima.

Periodo t	Inversión I_0	costo variable acumulado	ingreso acumul.	Cheq var	a	b	densidad	P(-a)	cambio P(-a) teórico	cambio P(-a) teorem	cambio E	E	$(V1)^{1/2}$
0	1500												
1		1302	1952	0.06	-2.4E+05	2.4E+05	2.0E-06	5.0E-01	-	-	-	-849	239
2		1906	2859	0.06	-1.6E+08	1.6E+08	3.2E-09	5.0E-01	baja	baja	sube	-547	286
3		2482	3723	0.07	-9.8E+10	9.8E+10	5.1E-12	5.0E-01	baja	baja	sube	-259	323
4		3031	4546	0.07	-5.8E+13	5.8E+13	8.7E-15	5.0E-01	baja	baja	sube	15	353
5	2500	3553	5329	0.07	-3.2E+16	3.2E+16	1.5E-17	5.0E-01	sube	sube	sube	276	378
6		4050	6076	0.08	-1.7E+19	1.7E+19	2.9E-20	5.0E-01	sube	sube	baja	-475	400
7		4524	6786	0.08	-8.8E+21	8.8E+21	5.7E-23	5.0E-01	igual	baja	sube	-238	418
8		4975	7463	0.09	-4.3E+24	4.3E+24	1.2E-25	5.0E-01	igual	baja	sube	-12	434
9		5405	8108	0.09	-2.0E+27	2.0E+27	2.5E-28	5.0E-01	igual	baja	sube	203	448
10	2000	5814	8722	0.10	-8.6E+29	8.6E+29	5.8E-31	5.0E-01	igual	sube	sube	407	461
11		6204	9306	0.10	-3.6E+32	3.6E+32	1.4E-33	5.0E-01	igual	sube	baja	-398	472
12		6576	9863	0.11	-1.4E+35	1.4E+35	3.5E-36	5.0E-01	igual	sube	sube	-212	482
13		6929	10394	0.11	-5.5E+37	5.5E+37	9.1E-39	5.0E-01	igual	sube	sube	-35	490
14		7266	10899	0.12	-2.0E+40	2.0E+40	2.5E-41	5.0E-01	igual	sube	sube	133	498
15	4000	7586	11380	0.12	-6.8E+42	6.8E+42	7.3E-44	5.0E-01	igual	sube	sube	293	505
16		7892	11838	0.13	-2.2E+45	2.2E+45	2.2E-46	5.0E-01	igual	sube	baja	-1054	511
17		8183	12274	0.13	-7.0E+47	7.0E+47	7.2E-49	5.0E-01	igual	baja	sube	-909	517
18		8460	12690	0.14	-2.1E+50	2.1E+50	2.4E-51	5.0E-01	igual	sube	sube	-770	522
19		8724	13085	0.15	-5.9E+52	5.9E+52	8.5E-54	5.0E-01	igual	sube	sube	-638	526
20		8975	13462	0.16	-1.6E+55	1.6E+55	3.2E-56	5.0E-01	igual	sube	sube	-513	530

Observe que la variancia del NPV computada por V1 es siempre creciente. Hay situaciones en donde E, la probabilidad de pérdida máxima y la variancia V1 tienen un comportamiento dispar. Por ejemplo al decidir completar el proyecto en el quinto año, o sea al alargar el proyecto un año pasando del cuarto al quinto, E aumenta, pero la variancia V1 y la probabilidad de pérdida máxima suben. Hecho que puede eventualmente evaluar quien toma de decisión.

Otro caso de comportamiento dispar aparece cuando en el pasaje del octavo al noveno año. E deja de ser negativo para volverse positivo, la variancia v1 del NPV aumenta pero la probabilidad de pérdida máxima disminuye. Además, no mostrado explícitamente en la tabla, el salto del periodo 8 al 10 también provoca una disminución en P(-a). Esto puede jugar a favor e inducir al agente averso al riesgo a extender el horizonte del proyecto hasta el décimo año pues el salto del octavo al décimo provoca no solo un significativo incremento en E sino también una disminución en la probabilidad de pérdida máxima ya que se pasa de un E<0 a un E>0.